Capitolul 5. Elemente de teoria probabilităților

Acest capitol este preluat din Dragomirescu (1998), cu unele corecții şi cu o piesă originală: aplicația ecologică sau biomedicală la regula adunării şi cea a înmulțirii probabilităților.

5.1. Notă istorică

Teoria probabilităților a fost fondată în secolul al XVII-lea de către Pascal (1623-1662) şi Fermat (1601-1665), pornind de la jocurile de noroc, mai precis de la problema cavalerului De Meré[1].

Ulterior, teoria probabilităților a început să se ocupe cu studiul **evenimentelor aleatoare**. Se consideră că evenimentele sunt de trei feluri: (1) **sigure** - dacă se realizează (în anumite condiții) cu certitudine; (2) **imposibile** - dacă nu se produc niciodată; şi (3) **aleatoare** - care pot apărea sau nu într-un anumit experiment.

Exemplul 5.1.1.

Fie experimentul reprezentat de aruncarea unui zar.
1) Un eveniment **sigur** este obținerea uneia din fețele 1-6.
2) Un eveniment **imposibil** este obținerea feței 0.
3) Evenimente **aleatoare** sunt obținerea feței 3 sau obținerea unei fețe cu număr par.

5.2. Conceptul de probabilitate

Acest capitol este o forma actulizată a capitolului corespunzător din Dragomirescu (1998).

Noțiunea de probabilitate a unui eveniment caracterizează gradul de posibilitate a producerii unui eveniment în condiții bine determinate. Procesul determinării sale este la fel de complex ca şi natura fenomenului respectiv (Iosifescu *et al.*, 1985).

Există două accepțiuni ale noțiunii de probabilitate: 1) **obiectivă** şi 2) **subiectivă**.

5.3. Accepțiunea de probabilitate obiectivă

Probabilitatea obiectivă are două definiții:

[1] Doi jucători vor să joace mai multe partide până ce unul câştigă m partide, dar jocul se întrerupe din anumite motive. În acel moment un jucător a câştigat $n < m$ partide iar celălalt $p < m$ partide. Cum se poate stabili corect câştigul în acest caz? (cf. Postelnicu şi Coatu, 1980, pag. 723)

5.3.1. Definiţia clasică

Probabilitatea unui eveniment *A* este numărul de cazuri (evenimente elementare, probe) favorabile lui *A* divizat prin numărul total (posibil) de cazuri

$$p(A) = n_A / n.$$

Exemplu 5.3.1.

În cazul aruncării unui zar, probabilitatea obţinerii unei feţe cu un număr par de puncte este $p = 3 / 6 = 1 / 2$

Observaţie:

Aceasta este o **probabilitate *a priori*** (teoretică), calculabilă înaintea efectuării experimentului sau în absenţa efectuării acestuia.

Critici

1) Definiţia este valabilă doar dacă evenimentele elementare sunt echiprobabile, adică noţiunea de probabilitate este sprijinită pe cea de echiprobabilitate, deci formează un cerc vicios!

2) Există fenomene în care nu se pot socoti evenimentele elementare sau nu se poate verifica echiprobabilitatea lor.

Exemplul 5.3.1'.

a) Probabilitatea de a supravieţui a unei persoane peste 1 an.

b) Probabilitatea de a ploua mâine într-o anumită regiune.

5.3.2. Definiţia empiristă

Probabilitatea unui eveniment reprezintă numărul către care tinde să se stabilizeze frecvenţa relativă a evenimentului respectiv pe măsură ce experimentul se repetă de un număr cât mai mare de ori. Definiţia empiristă este atribuită lui von Mieses (Mihoc, Iosifescu şi Urseanu, 1966).

Observaţie:

Aceasta este o **probabilitate *a posteriori*** experimentului.

Critică: Este valabilă doar pentru experimente repetabile în condiţii relativ echivalente.

5.4. Accepţiunea de probabilitate subiectivă

Probabilitatea subiectivă reprezintă o codificare (subiectivă) de informaţii efectuată de o persoană interesată în a o evalua (= "traducerea bunului simţ în cifre" - Iosifescu *et al.*, 1985).

Observaţii:

1) Se referă la evenimente care nu sunt neapărat repetabile.

2) Probabilitatea subiectivă se interpretează ca un pariu.

Exemplul 5.4.

a) Probabilitatea ca în următorii 10 ani să se descopere leacul contra SIDA.

b) Situaţiile de decizie din economia de piaţă.

5.5. Definiţia axiomatică a probabilităţii (Kolmogorov)

Este valabilă pentru ambele accepţiuni ale noţiunii de probabilitate, atât cea obiectivă, cât şi cea subiectivă. Prezentăm însă mai întâi foarte sintetic corespondenţa de limbaj între teoria mulţimilor şi cea a probabilităţilor (evenimentelor).

5.5.1. Corespondenţe între teoria mulţimilor şi cea a probabilităţilor

Definiţii:

- Se numeşte **probă** rezultatul unui experiment sau al unei observaţii. *Probele* se notează cu litere mici de tipar (*a, b,…, x, …)*, fiind asociate elementelor din teoria mulţimilor.
- Se numeşte **eveniment** o mulţime de *probe* (rezultate) care se pot obţine în experimentul sau observaţia respectivă. *Evenimentele* se notează cu litere mari de tipar (*A, B,…,X,…*) , fiind asociate mulţimilor din cadrul teoriei mulţimilor.
- Se numeşte **evenimentul sigur**, mulţimea formată din toate *probele* (rezultatele) care se pot obţine în experimentul sau observaţia respectivă. Se notează, de exemplu, prin *E*.
- Se numeşte **eveniment elementar** un *eveniment* format dintr-o singură *probă.* Se notează, de exemplu, prin $\{x\}$.
- Se numeşte **evenimentul imposibil**, *evenimentul* care nu conţine nici-o *probă* (care s-ar putea obţine în experimentul sau observaţia respectivă).

Limbajul mulţimilor	**Notaţii**	**Limbajul evenimentelor**	**Notaţii**
Element	x	Probă	X
Mulţime	A sau $\{x, y, z\}$	Eveniment	A sau $\{x, y, z\}$
Mulţime formată dintr-un element	$\{x\}$	Eveniment elementar	$\{x\}$
A inclus în B	$A \subseteq B$	A implică B	$A \Rightarrow B$
Mulţimea totală	E	Evenimentul sigur	E
Submulţime A a lui E	$A\ (\subset E)$	Eveniment A	$A \Rightarrow E$
Mulţimea vidă	$\varnothing$	Evenimentul imposibil	$\varnothing$
Reuniunea lui A cu B	$A \cup B$	Disjuncţia lui A cu B (A sau B)	$A \vee B$
Intersecţia lui A cu B	$A \cap B$	Conjuncţia lui A cu B (A şi B)	$A \wedge B$
Complementara lui A	C_A	Opusul lui A	$\rceil A$ (*non* A)
Mulţimi disjuncte	$A \cap B = \varnothing$	Evenimente incompatibile	$A \wedge B = \varnothing$
Mulţimi nedisjuncte	$A \cap B \neq \varnothing$	Evenimente compatibile	$A \wedge B \neq \varnothing$
Mulţimi mutual[2] disjuncte	$A_i \cap A_j = \varnothing$, $(\forall)\ i \neq j$	Evenimente mutual incompatibile	$A_i \wedge A_j = \varnothing$, $(\forall)\ i \neq j$

În continuare vom folosi, totuşi, (cu mici excepţii) notaţiile din teoria mulţimilor, acestea fiind mai bine cunoscute. Ca exprimare, vom apela însă şi la termenii limbajului cu evenimente.

5.5.2. Câmp finit de evenimente

Definiţie: Fie E o mulţime finită de evenimente elementare. Se numeşte **câmp (finit) de evenimente**, o mulţime de evenimente din E, notată $\mathcal{K}(\subset \mathcal{P}(E))$, care:

[2] două câte două

1. $\mathcal{K} \ni E$ (conţine evenimentul sigur);
2. Dacă $A \in \mathcal{K} \Rightarrow C_A \in \mathcal{K}$ (este închisă[3] la considerarea evenimentului opus unui eveniment dat);
3. $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$ (este închisă la disjuncţia de două evenimente).

Consecinţă:

$\mathcal{K}$ este închis la orice disjuncţie finită de evenimente din $\mathcal{K}$:

$$A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n.$$

Exemplu

Fie experimentul reprezentat de aruncarea unui zar.

$E = \{1, 2, ... , 6\}$ şi evenimentele A = {apariţia unei feţe cu număr par} şi B = {apariţia unei feţe cu număr impar}

$\mathcal{K}_1 = \{E, A, B, \varnothing\}$, $\mathcal{K}_2 = \{E, \varnothing\}$, $\mathcal{K}_3 = \mathcal{P}(E)$.

5.5.3. Probabilitate (în sens axiomatic) şi câmp finit de probabilitate

Definiţie: Fie $\mathcal{K}$ un câmp finit de evenimente peste E. Se numeşte **probabilitate** o funcţie de mulţime $p : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

1. $0 \le p(A) \le 1$, $(\forall) A \in \mathcal{K}$ (subunitară);
2. $p(E) = 1$ (cu probabilitatea evenimentului sigur egală cu 1)
3. $p(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n)$ dacă $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(\forall)\ i \ne j$ (aditivitate pentru evenimente mutual incompatibile) - **regula de adunare a probabilităţilor** (evenimentelor mutual incompatibile).

Proprietăţile-consecinţă ale probabilităţii:

4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
5. $p(C_A) = 1 - p(A)$
6. $p(\varnothing) = 0$
7. $p(A \cap B) = p(A) - p(B)$, dacă $B \subset A$
8. $p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap B)$

Definiţie: Tripletul $\{E, \mathcal{K}, p\}$ se numeşte **câmp (finit) de probabilitate**.

5.5.4. Sistem complet de evenimente

Definiţie: Fie $(E, \mathcal{K})$ un câmp finit de evenimente şi $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i = 1, 2, ... ,n}$ o familie de evenimente din $\mathcal{K}$. $\mathcal{C}$ se numeşte **sistem complet de evenimente**, dacă:

1. $(\forall) A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow A_i \ne \varnothing$ (orice A_i din $\mathcal{C}$ este diferit de evenimentul imposibil)
2. $(\forall) A_i, A_j \in \mathcal{C}$ cu $i \ne j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (orice două evenimente diferite sunt incompatibile, adică $\mathcal{C}$ este o mulţime de evenimente mutual incompatibile)
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ (disjuncţia evenimentelor din $\mathcal{C}$ este evenimentul sigur E)

Observaţii:

Noţiunea este întâlnită în teoria mulţimilor prin denumirile de partiţie sau de diviziune ale unei mulţimi E.

3 Expresia "este închisă la operaţia cutare" înseamnă că, aplicând operaţia elementelor din mulţimea respectivă, nu putem ieşi din cadrul acelei mulţimi, adică este închisă (la operaţia specificată).

În cazul în care cunoaştem câmpul de probabilitate (adică probabilităţile tuturor evenimentelor din $\mathcal{K}$), atunci putem determina şi probabilităţile evenimentelor din sistemul complet de evenimente $\mathcal{C}$.

Reciproca nu este, însă, adevărată.

Exemplu metaforic

Dacă vom considera drept evenimente elementare cele mai mici cioburi posibile dintr-o farfurie, atunci mulţimea cioburilor în care se sparge o farfurie, notată $\mathcal{C}_1$, formează un sistem complet de evenimente deoarece (1) fiecare ciob este nevid, (2) oricare pereche de cioburi nu are elemente comune şi (3) toate cioburile reunite formează întreaga farfurie.

Exemplu din genetică

Fie E = mulţimea genotipurilor sangvine = { 00, A0, AA, B0, BB, AB}. Atunci

$\mathcal{C}_2$ = mulţimea fenotipurilor sangvine = { {00}, {A0, AA}, {B0, BB}, {AB} }

notate respectiv: (0) (A) (B) (AB)

formează, de asemenea, un sistem complet de evenimente.

Problemă propusă: Să se verifice că $\mathcal{C}_2$ este un sistem complet de evenimente.

Observaţie:

Atunci când cunoaştem probabilităţile (frecvenţele) genotipurilor, putem determina probabilităţile fenotipurilor, reciproca nefiind valabilă, conform observaţiei de mai sus.

Exemplu medical

Fie o populaţie umană şi evenimentul sigur "x aparţine lui E". Familia de evenimente alcătuită din evenimentul B = "x are boala b" şi evenimentul *non B* = "x nu are boala b", formează un sistem complet de evenimente: $\mathcal{C}_3=\{B, \text{non } B\}$.

5.5.5. Probabilitate condiţionată şi evenimente independente

1° Probabilitate condiţionată

Definiţie: Fie A, B evenimente compatibile (adică $A \cap B \neq \varnothing$). Se numeşte **probabilitatea lui *A* condiţionată de *B*** sau **probabilitatea lui *A* a posteriori producerii lui *B*** şi se notează $\boldsymbol{p\,(A \mid B)}$, raportul $p\,(A \cap B)\,/\,p\,(B)$.

Observaţii:

- Deoarece *probabilitatea lui A* se calculează înaintea efectuării oricărui experiment, $p\,(A)$ se numeşte şi **probabilitate a priori a lui *A*.**
- În mod analog, se defineşte **probabilitatea lui *B* condiţionată de *A***:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Consecinţe:

Din cele două relaţii de mai sus rezultă respectiv:

1. $p\,(A \cap B) = p\,(A \mid B) \cdot p\,(B)$
2. $p\,(A \cap B) = p\,(B \mid A) \cdot p\,(A)$

2° Aplicaţii în epidemiologie ale probabilităţii condiţionate

În epidemiologia bolilor cronice se calculează **riscul absolut de contractare a unei anumite boli *b* în prezenţa unui anumit factor *f***, care este prin definiţie <u>probabilitatea de a contracta boala *b* condiţionată de prezenţa factorului *f*</u>. Adică dacă notăm cu B evenimentul contractării bolii *b* şi cu *F* evenimentul prezenței factorului *f*, acest risc absolut se poate nota $p(B|F)$.

Exemple

1. Să presupunem că am urmărit în timp un lot de 10 000 de fumători şi am constatat că 200 dintre aceştia au contractat cancer bronhopulmonar. Atunci *riscul absolut de a contracta cancer pulmonar al unui fumător* este $p(B\mid F) = \dfrac{p(B\cap F)}{p(F)} = \dfrac{200}{10\,000} = 0{,}02 = 2\%$.

2. În mod analog, se poate studia riscul nefumătorilor. Să presupunem, de exemplu, că dintr-un lot de 20000 de nefumători au contractat cancer bronhopulmonar numai 20 de indivizi. Atunci *riscul absolut de a contracta cancer pulmonar al unui nefumător* este:

$$p(B\mid non\ F) = \frac{p(B\cap non\ F)}{p(non\ F)} = \frac{20}{20\,000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001 = 1‰.$$

Pentru a se stabili dacă fumatul este factor de risc în cancerul bronhopulmonar şi cât de nociv este, epidemiologii calculează raportul celor două riscuri, raport denumit **risc relativ de a contracta cancer bronhopulmonar al fumătorilor (față de nefumători)**.

În general, se numeşte **risc *relativ*** *de contractare a bolii B în prezența factorului F (față de absența acestuia)* raportul:

$$x = \frac{p(B\mid F)}{p(B\mid non\ \mathrm{F})}.$$

În cazul exemplului de mai sus:

$$x = \frac{0{,}02}{0{,}001} = 20.$$

Ca interpretare putem afirma că <u>fumătorii au un risc de 20 de ori mai mare decât nefumătorii de a face cancer bronhopulmonar</u>[4].

Studii prospective şi studii retrospective

În epidemiologia bolilor cronice există două tipuri de studii care pot conduce la determinarea riscului relativ: studii prospective, respectiv retrospective [8].

Studiile prospective presupun urmărirea în timp îndelungat a două loturi, unul fiind supus factorului cercetat *f*, iar altul fiind în situația contrară. În final se numără cei care au contractat boala urmărită *b* în fiecare din cele două loturi. Este practic situația prezentată mai sus. Constituirea loturilor, precum şi probabilitățile care pot fi direct calculate se pot reprezenta astfel:

Lot cu factorul f:	$p(B\mid F)$	
		$x = \dfrac{p(B\mid F)}{p(B\mid nonF)}$
Lot cu factorul non f:	$p(B\mid non\ F)$	

Aceste studii sunt însă fie foarte costisitoare, fie chiar imposibile. De exemplu, în cazul bolilor rare este posibil ca după zeci de ani de aşteptare să nu apară cazuri de îmbolnăvire în cel puțin unul din cele două loturi şi ca atare să nu putem calcula riscul. De aceea, se apelează de regulă la cealaltă categorie de studii.

4 Rezultatul epidemiologic este real, deşi datele utilizate aici sunt fictive. Sunt însă în acord cu un studiu relativ recent efectuat în Marea Britanie asupra a cca. 30 000 de subiecți. În capitolul 9 din Dragomirescu (1998) am văzut care este importanța obținerii unui asemenea rezultat pe un volum mare de indivizi.

Studiile retrospective compară proporţia de indivizi care au fost supuşi factorului de risc din cadrul unui lot de bolnavi de boala respectivă *b* cu aceeaşi proporţie din cadrul întregii populaţii biologice din care provine lotul de bolnavi.

Evident, costul acestui studiu este cu mult mai mic şi poate fi făcut rapid după ce fenomenul (îmbolnăvirea) a avut loc, adică retrospectiv. Problema care se pune este dacă din informaţiile acestui tip de studiu putem obţine riscul relativ. Să figurăm însă, mai întâi, schema acestui studiu în mod analog schemei precedente tocmai pentru a vizualiza informaţiile de care dispunem.

Lot cu boala *b*	Lot de control (din populaţie)
$p\,(F \mid B)$ $p\,(non\ F \mid B)$	$p\,(F)$ $p\,(non\ F)$

Observăm că:

$x = \dfrac{p(B \mid F)}{p(B \mid nonF)}$ = cf. definiţiilor $= \dfrac{p(B \cap F)/p(F)}{p(B \cap nonF)/p(nonF)}$ = cf. consecinţelor de mai sus = $\dfrac{p(F \mid B)\cdot p(B)\cdot p(nonF)}{p(nonF \mid B)\cdot p(B)\cdot p(F)}$ = simplificăm cu $p\,(B)$ = $\dfrac{p(F \mid B)\cdot p(nonF)}{p(nonF \mid B)\cdot p(F)}$.

În consecinţă, riscul relativ, x, poate fi calculat din informaţiile acestui tip de studiu.

3° Formula probabilităţii totale

Fie $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ un sistem complet de evenimente din $\mathcal{K}$ (câmp finit de evenimente din E) şi $X \in \mathcal{K}$.

$$p(X) = \sum_{j=1}^{n} p(X \mid A_j)\cdot p(A_j)$$

Demonstraţie:

Observăm că X se poate scrie $X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \cap A_i)$, în care $\{X \cap A_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ formează o familie de evenimente mutual incompatibile (vezi mulţimile colorate gri din *Fig. 33*).

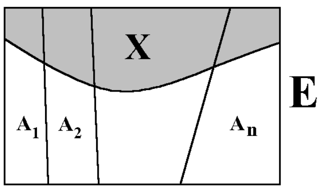


Fig. 33.

Atunci $p\,(X) = p(\bigcup_{i=1}^{n} (X \cap A_i))$ = pe baza mutual incompatibilităţii = $\sum_{i=1}^{n} p(X \cap A_i)$ = cf. consecinţei la definiţia probabilităţii condiţionate = $\sum_{i=1}^{n} p(X \mid A_i)\cdot p(A_i)$

Aplicaţie în biologie

Se amestecă trei linii de cobai formate din câte 30, 60, respectiv 10 indivizi. Ştiind că mortalităţile acestor linii sunt 3‰, 1‰, respectiv 5‰, să se determine mortalitatea lotului amestecat (care are, evident, 100 de indivizi).

Rezolvare:

Notăm cu *I* evenimentul “cobaiul aparţine lotului 1”, respectiv cu *II* şi *III*, apartenenţele la celelalte două loturi, cu $E = I \cup II \cup III$ şi cu X evenimentul "cobaiul a murit". Evident, $\mathcal{C} = \{I, II, III\}$ este un sistem complet de evenimente, pentru care cunoaştem probabilităţile:

$p\,(I) = 30 / 100 = 3 / 10$, $p\,(II) = 60 / 100 = 6 / 10$ şi $p\,(III) = 10 / 100 = 1 / 10$.

Mortalitățile loturilor sunt următoarele probabilități condiționate:

$$p\,(X\,|\,I) = 3\,/\,1000,\;\; p\,(X\,|\,II) = 1\,/\,1000,\;\; p\,(X\,|\,III) = 5\,/\,1000.$$

Aplicăm formula probabilității totale:

$$p\,(X) = p\,(X\,|\,I)\cdot p\,(I) + p\,(X\,|\,II)\cdot p\,(II) + p\,(X\,|\,III)\cdot p\,(III) = 2‰.$$

Observație:

De fapt problema este echivalentă cu bine cunoscuta problemă de amestec din chimie, a mai multor soluții cu concentrații diferite şi în cantități, de asemenea, diferite.

4° Evenimente independente versus dependente

Definiții:

Fie două evenimente A şi B compatibile.

Definiția 1:

B se numeşte **independent de *A*** dacă probabilitatea lui B nu se modifică dacă ştim că s-a realizat A, adică: $p\,(B) = p\,(B \,|\, A)$.

Cu alte cuvinte, B se numeşte independent de A dacă probabilitatea sa a priori ($p\,(B)$) este egală cu probabilitatea sa a posteriori ($p\,(B\,|\,A)$).

Consecințe:

1. B este independent de $A \Leftrightarrow p\,(B \cap A) = p\,(B)\cdot p\,(A)$.

Într-adevăr, înlocuind în definiția de mai sus definiția lui $p\,(B\,|\,A)$ obținem egalitatea $p\,(B) = p\,(B \cap A)\,/\,p\,(A)$ care se poate scrie $p\,(B \cap A) = p\,(B)\cdot p\,(A)$ c.c.t.d.

2. B este independent de $A \Leftrightarrow A$ este independent de B.

Demonstrația decurge identic cu cea anterioară folosind însă definiția lui $p\,(A\,|\,B)$.

3. Cele două consecințe conduc la ideea, naturală de altfel, că independența este o noțiune corelativă, deci că trebuie să vorbim de *evenimente independente* şi că putem lua ca definiție egalitatea din consecința 1.

Definiția 2:

A şi B se numesc **independente** dacă probabilitatea realizării simultane a celor două evenimente este egală cu produsul probabilităților celor două evenimente: $p\,(A \cap B) = p\,(A)\cdot p\,(B)$. Această egalitate se numeşte **regula de înmulțire a probabilităților** (evenimentelor independente).

În caz contrar, evenimentele A şi B se numesc **dependente**.

Consecințe:

4. Cele două definiții sunt echivalente, adică A şi B sunt independente $\Leftrightarrow A$ este independent de B şi B este independent de A.

5. A şi B sunt independente $\Leftrightarrow p\,(non\,A\,|\,B) = p\,(non\,A)$.

Într-adevăr $p\,(non\,A\,|\,B) = 1 - p\,(A\,|\,B) =$ (A fiind independent de B) $= 1 - p\,(A) = p\,(non\,A)$.

6. A şi B sunt independente $\Leftrightarrow p\,(B\,|\,non\,A) = p\,(B)$.

Într-adevăr $p\,(B\,|\,non\,A) = p\,(B \cap non\,A)\,/\,p\,(non\,A) = p\,(non\,A \cap B)\,/\,p\,(non\,A) = p\,(non\,A\,|\,B)\cdot p(B)\,/\,p\,(non\,A) =$ (conform 5) $= p\,(non\,A)\cdot p\,(B)\,/\,p\,(non\,A) = p\,(B)$.

Prin urmare, în cazul independenței evenimentelor A şi B probabilitatea unui eveniment (de exemplu B) nu se modifică nici în cazul nerealizării celuilalt (A).

Rezumând toate aceste consecințe, putem formula următoarea caracterizare a independenței:

7. *A* şi *B* sunt independente $\Leftrightarrow$ probabilitatea realizării unui eveniment rămâne neschimbată dacă se realizează sau nu celălalt eveniment.

Această proprietate este folosită intuitiv atunci când se construieşte conceptul de risc relativ. Altfel spus independența înseamnă risc relativ 1. Se foloseşte, de asemenea, în introducerea intuitivă a ideii de independență (ca lipsă de asociere) într-un tabel de contingență (vezi Dragomirescu şi Drane, 2007).

Exemplu

Fie experimentul reprezentat de aruncarea a două zaruri şi evenimentele:

A = {apariția feței 1 la zarul 1}

B = {apariția feței 1 la zarul 2}

C = {apariția unei fețe la zarul 1 şi a unei fețe la zarul 2 astfel încât suma valorilor lor să fie mai mică sau egală cu 3}

Evident:

$p\,(A) = 1 / 6$

$p\,(B) = 1 / 6$

$p\,(C) = 3 / 36 = 1 / 12$, deoarece din cele 36 de perechi de fețe posibile (vezi figura următoare): (1,1), (1, 2), ..., (1,6), ..., (6,1), (6,2) ..., (6, 6), doar 3 perechi satisfac evenimentul C: **(1,1), (1,2) şi (2, 1)**.

zar 2

		1	2	3	4	5	6	
	1	**(1,1)**	**(1,2)**	...	...	...	(1,6)	*A*
	2	**(2,1)**	...	...	...	...	(2,6)	
zar 1	3	...						
	4	...						
	5	...						
	6	(6,1)	...	...	...	...	(6,6)	
		B						

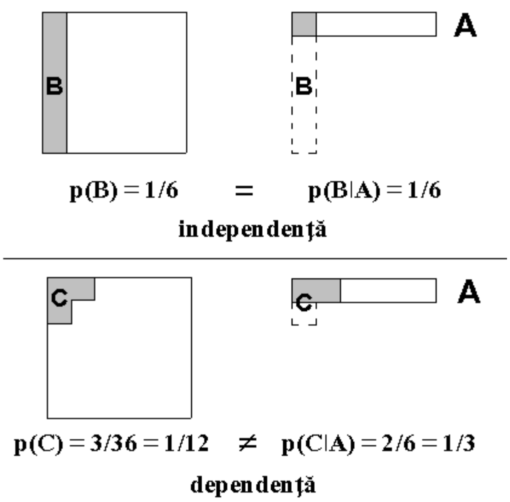
Vom verifica independența evenimentelor B şi A şi dependența lui C de A. Să presupunem că am aruncat primul zar şi am obținut fața 1, respectiv nu am obținut fața 1, adică ştim că s-a produs evenimentul A, respectiv că s-a produs *non* A. Atunci:

$p\,(B \mid A) = p\,(B \cap A) / p\,(A) =$
$(1 / 36) / (1 / 6) = 1 / 6 = p\,(B)$

respectiv
$p(B \mid non\ A) = p(B \cap non\ A) / p(non\ A) = (5 / 36) / (30 / 36) = 1 / 6 = \mathrm{p(B)}$

$p\,(C \mid A) = p\,(C \cap A) / p\,(A) =$
$(2 / 36) / (1 / 6) = 1 / 3 \neq p\,(C) = 1/ 12$

respectiv
$p(C \mid non\ A) = p(C \cap non\ A) / p(non\ A) =$
$(1 / 36) / (30 / 36) = 1 / 30 \neq p(C) = 1 / 12$



Evenimentele A şi B sunt, deci, independente, iar evenimentele A şi C sunt dependente.

Consecinţă:

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Leftrightarrow A$ şi B sunt independente.

Formula rezultă dacă înlocuim în prima consecinţă a definiţiei probabilităţii condiţionate pe $p(A|B)$ cu $p(A)$, ceea ce se poate face dacă şi numai dacă A şi B sunt independente.

Această propoziţie, fiind o echivalenţă, este luată de mulţi autori ca definiţie a independenţei celor două evenimente A şi B.

Aplicaţie ecologică sau biomedicală

O aplicaţie a *regulii de înmulţire a probabilităţilor* evenimentelor independente dar şi a *regulii de adunare a probabilităţilor* evenimentelor mutual incompatibile este calculul sensibilităţilor şi specificităţilor testului conjuncţie, respectiv, disjuncţie.

Pentru început observăm că sensibilitatea unui test binar T_1 (Se_1) - fiind proporţia de adevărat pozitivi (ap_1) din cei care au boala b (B), adică $Se_1 = ap_1 / B$ – se poate scrie sub forma $Se_1 = p(+_1|B)$. Analog, Sp_1 ($= an_1 / non\ B) = p(-_1|non\ B)$.

Să considerăm acum două teste binare, T_1 şi T_2, pentru aceeaşi boala b, *independente*, cu sensibilităţile şi specificităţile corespunzător, Se_1, Se_2, Sp_1, şi Sp_2. Dacă vom considera **testul conjuncţie** T_C a celor două teste - care este, prin definiţie, pozitiv („+"), dacă şi numai dacă ambele teste sunt pozitive ($+_1 \cap +_2$) - atunci **sensibilitatea testului conjuncţie**, $Se_C = p(+_1 \cap +_2|B)$ = *testele fiind independente aplicăm regula de înmulţire a probabilităţilor* = $p(+_1|B) \cdot p(+_2|B) = Se_1 \cdot Se_2$.

Pentru calculul specificităţii testului conjuncţie, observăm că rezultatul negativ al acestuia („-") înseamnă disjuncţia de evenimente $(+_1 \cap -_2) \vee (-_1 \cap +_2) \vee (-_1 \cap -_2)$. Astfel, **specificitatea testului conjuncţie,** $Sp_C = p(\text{„-"}|non\ B) = p((+_1 \cap -_2) \vee (-_1 \cap +_2) \vee (-_1 \cap -_2)|non\ B)$ = *cele trei evenimente fiind mutual incompatibile aplicăm regula de adunare a probabilităţilor* $= p(+_1 \cap -_2|non\ B) + p(-_1 \cap +_2|non\ B) + p(-_1 \cap -_2|non\ B)$ = *testele fiind independente* $= p(+_1|non\ B) \cdot p(-_2|non\ B) + p(-_1|non\ B) \cdot p(+_2|non\ B) + p(-_1|non\ B) \cdot p(-_2|non\ B) = (1 - p(-_1|non\ B)) \cdot Sp_2 + Sp_1 \cdot (1 - p(-_2|non\ B)) + Sp_1 \cdot Sp_2 = (1 - Sp_1) \cdot Sp_2 + Sp_1 \cdot (1 - Sp_2) + Sp_1 \cdot Sp_2 = Sp_2 – Sp_1 \cdot Sp_2 + Sp_1 – Sp_1 \cdot Sp_2 + Sp_1 \cdot Sp_2 = Sp_2 + Sp_1 – Sp_1 \cdot Sp_2$.

Deci, $Se_C = Se_1 \cdot Se_2$ şi $Sp_C = Sp_1 + Sp_2 – Sp_1 \cdot Sp_2$.

Pentru **testul disjuncţie**, T_D - care este, prin definiţie, pozitiv („-"), dacă şi numai dacă ambele teste sunt negative ($-_1 \cap -_2$) se obţin analog formulele:

$Se_D = Se_1 + Se_2 – Se_1 \cdot Se_2$ şi $Sp_D = Sp_1 \cdot Sp_2$

5° Formula lui Bayes

Fie $\mathcal{C}$ un sistem complet de evenimente din $\mathcal{K}$, $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ şi X, de asemenea, un eveniment din $\mathcal{K}$. Atunci avem formula:

$$p(A_k | X) = \frac{p(X | A_k) \cdot p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(X | A_i) \cdot p(A_i)}$$

Demonstraţia rezultă astfel:

$$p(A_k | X) \overset{definitie}{=} \frac{p(A_k \cap X)}{p(X)} = \frac{p(X \cap A_k)}{p(X)} = \frac{p(X | A_k) \cdot p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(X | A_i) \cdot p(A_i)}$$

Ultima egalitate rezultă aplicând la numărător consecinţa definiţiei probabilităţii condiţionate, iar la numitor formula probabilităţii totale.

Aplicaţie biomedicală

Fie sistemul complet de evenimente $\mathcal{C}_3=\{B, non\ B\}$ prezentat mai sus ca exemplu medical şi *X* evenimentul "*x* are rezultat pozitiv la un anumit test binar", eveniment pe care îl vom nota "+". Atunci formula lui Bayes devine:

$$p(B\mid +) = \frac{p(+\mid B)\cdot p(B)}{p(+\mid B)\cdot p(B)+p(+\mid nonB)\cdot p(nonB)}$$

Dacă observăm că:

- $p\ (B\mid +)$, adică probabilitatea de a fi bolnav de boala b dacă ai rezultat pozitiv este Valoarea Predictivă a rezultatului Pozitiv (*VPP*),
- $p\ (+\mid B)$, adică probabilitatea testului de a da rezultat pozitiv dacă eşti bolnav este Sensibilitatea testului (*Se*),
- $p\ (+\mid non\ B) = 1 - p\ (-\mid non\ B)$ = adică 1 - probabilitatea testului de a da rezultat negativ atunci când nu ai boala *b* = 1 - Specificitatea testului = 1 - *Sp* şi
- $p\ (B)$, adică probabilitatea de a avea boala *B* este Prevalenţa bolii (*Pre*),

vom obţine tocmai formula valorii predictive a rezultatului pozitiv prezentată în Dragomirescu şi Drane (2007):

$$VPP = \frac{Se\cdot \Pr e}{Se\cdot \Pr e+(1-Sp)\cdot(1-\Pr e)}$$

În mod analog, rezultă şi formula valorii predictive a rezultatului negativ din acelaşi subparagraf.

Observaţie:

Formula lui Bayes se bazează pe conceptul de probabilitate condiţionată şi ca atare presupune efectuarea cel puţin o dată a experimentului respectiv. Ea oferă astfel o modalitate de corectare a probabilităţii unui eveniment pe baza informaţiei obţinute în urma fiecărui experiment. Astfel se pot face predicţii din ce în ce mai bune pe măsura repetării experimentului. Pe baza ideii acestei formule s-a construit o întreagă ramură a statisticii matematice denumită predicţie bayesiană. Mai mult chiar, statisticienii s-au divizat în două tabere denumite "bayesieni" şi "frecventişti" (tabăra clasică) în raport cu modul de construcţie teoretică a statisticii matematice.