§ 3.4. ▶ Alți indicatori de localizare

În afară de indicatori de tendință centrală, care au sens doar pentru distribuțiile unimodale, putem vorbi de indicatori de *localizare a tendințelor extreme* sau *intermediare*, valabili pentru orice distribuții. De pildă, *valorile minimă și maximă* dintr-un şir (notate în mod curent, x_{min}, respectiv x_{max}) sunt exemple de indicatori de localizare a extremelor, cu sens pentru orice distribuție.

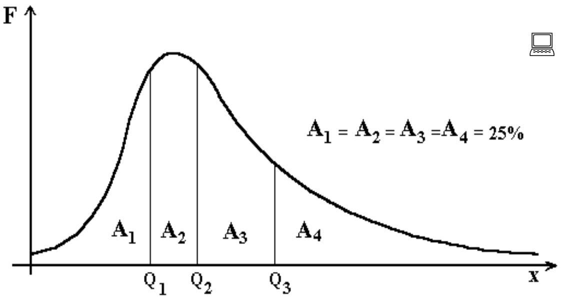
În continuare, generalizând modelul "geometric" al medianei, vom introduce o gamă foarte utilizată de indicatori de localizare (*cuartilele, decilele,* şi *centilele*) şi o generalizare a acestora (*cuantilele de ordinul m*). În finalul paragrafului se prezintă generalizarea conceptelor de *cuantilă inferioară*, respectiv *superioară de ordinul m*, şi anume *α-cuantila inferioară*, respectiv *superioară.* Ultimele două noțiuni vor fi extrem de importante în special pentru statistica inductivă.

3.4.1. Cuartile

1° Notații: Q_1, Q_2, respectiv Q_3.

2° Definiții

- În cazul unei *curbe de frecvențe* (distribuție continuă a unei variabile continue), **cuartilele =** cele 3 puncte care împart aria de sub curba de frecvențe în 4 arii egale (fiecare arie reprezentând 25% din întreaga arie de sub curbă).



Observație: Cuartila a doua, Q_2, este chiar mediana, *Me*, şi este, deci, un indicator de tendință centrală, în timp ce cuartilele întâia şi a treia, Q_1, respectiv Q_3, sunt indicatori de localizare a unor tendințe intermediare.

- În cazul *seriilor statistice*, **cuartile** = trei valori care împart seria statistică ordonată crescător în patru subserii de volume egale (volumele fiind măsurate în număr de unități statistice şi, eventual, pătrimi ale acestora).

Q_1 se numeşte **cuartilă inferioară** şi lasă la stânga sa, în seria statistică ordonată crescător, 25% din termeni şi, eventual, pătrimi ale acestora.
Q_2 este mediana seriei.
Q_3 se numeşte **cuartilă superioară** şi lasă la stânga sa, în seria statistică ordonată crescător, 75% din termeni şi, eventual, pătrimi ale acestora.

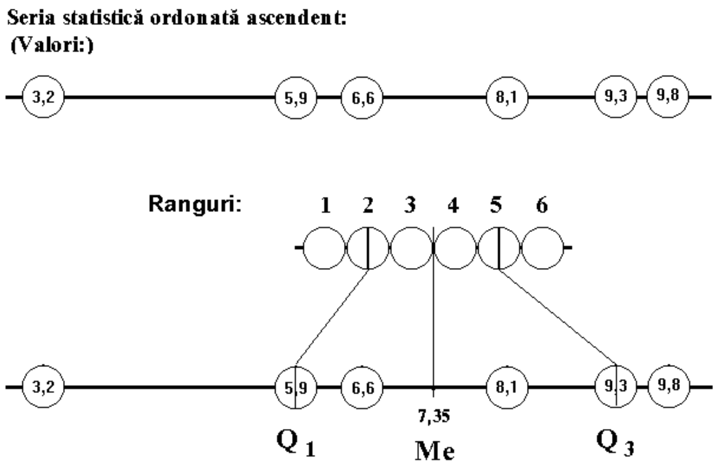
În acest caz, definiția poate conduce la valori unice doar cu convenții suplimentare, întocmai ca la definiția medianei în acelaşi context. Convențiile necesare pentru stabilirea unor valori unice vor rezulta din exemplul următor.

Exemplul 3.4.1.

Fie următoarea serie de 6 concentrații de oxigen măsurate în mg/l, în apa din Delta Dunării şi ordonate crescător:

3,2 5,9 6,6 8,1 9,3 9,8.

Numerele ordonate sunt ca nişte mărgele înşirate, la diverse distanțe, pe o ață. Strângem mărgelele unele lângă altele "desființând" distanțele. Astfel numerele devin ranguri. Tăiem apoi acest şirag în patru părți egale - de câte o mărgea şi jumătate, în acest caz - ca în mijlocul figurii următoare.



Cuartila inferioară, Q_1, va "tăia" mijlocul "mărgelei" a 2-a, adică va fi 5,9. Mediana va cădea între cea de-a 3-a şi cea de-a patra "mărgea". Va fi semisuma acestora: $Me = (6,6 + 8,1) / 2 = 7,35$. Cuartila superioară Q_3, va "tăia" mijlocul mărgelei a 5-a. Va fi, deci, 9,3.

În practică, calculul cuartilei Q_l, pentru $l = 1, 2, 3$, se face astfel, conform convenţiilor introduse mai sus:

- Ordonăm <u>ascendent</u> seria de volum N.
- Calculăm rangul cuartilei respective $rg(Q_l) = N \cdot (l / 4)$.
- Dacă $rg(Q_l)$ este număr fracţionar, îl rotunjim prin adaos şi Q_l este termenul cu rangul rotunjit. În caz contrar, Q_l este semisuma dintre termenul cu rangul $rg(Q_l)$ şi următorul termen.

În cazul exemplului anterior, seria ordonată ascendent fiind:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3,2	5,9	6,6	8,1	9,3	9,8

$rg(Q_1) = 6 \cdot (1 / 4) = 1\frac{2}{4}$, rotunjit prin adaus = **2** $\Rightarrow Q_1 = x_2$ din seria ordonată ascendent = 5,9.

$Rg(Q_2) = 6 \cdot (2/4) = \mathbf{3} \Rightarrow Q_2 = Me = \frac{x_3 + x_4}{2}$ (x_3, x_4 din seria ordonată ascendent) = $\frac{6,6 + 8,1}{2} = 7,35$.

$Rg(Q_3) = 6 \cdot (3 / 4) = 4\frac{2}{4}$, rotunjit prin adaus = **5** $\Rightarrow Q_3 = x_5$ din seria ordonată ascendent = 9,3.

Exemplul 3.4.1'.

Fie seria de volum 4 ordonată ascendent: 1; 2; 8; 8. Cuartilele vor fi numerele marcate cu bold sub seria ordonată:

1 2 8 8

1,5 **5** **8**

Exemplul 3.4.1''.

Să se calculeze cuartilele pentru seria 8; 7; 3; 1; 2.

Rezolvare:

Ordonăm ascendent seria şi marcăm cu bold cuartilele:

1 2 3 7 8

2 **3** **7**

3.4.2. Decile şi centile

În mod analog, se introduc noţiunile de *decile* ($D_1, D_2, ..., D_9$) şi de (*per*)*centile* ($C_1, C_2, ..., C_{99}$), respectiv de *decilă inferioară* (D_1), *decilă superioară* (D_9), *centilă inferioară* (C_1) şi *centilă superioară* (C_{99}).

Definiţiile decilelor, respectiv, ale centilelor se pot obţine înlocuind în definiţia cuartilelor cuvântul "trei" cu "nouă", respectiv cu "nouăzeci şi nouă" şi cuvântul "pătrimi" cu "zecimi", respectiv cu "sutimi". Algoritmul de calcul al acestora se poate obţine, de asemenea, înlocuind în algoritmul de calcul al cuartilelor, expresia "$N\cdot(1/4)$" cu "$N\cdot(1/10)$", respectiv cu "$N\cdot(1/100)$". Cele mai utilizate centile sunt C_5 şi C_{95}.

1° Metodă de calcul rapid

Pentru calculul rapid al centilelor propunem utilizarea următoarei metode. Aceasta presupune trei paşi.

Pasul 1. Pornim de la distribuția de frecvențe relative procentuale – a se vedea primele două coloane din tabela următoare. În coloana 1 (notată Col. 1) sunt trecute, ordonat ascendent, valorile distincte al seriei, iar în coloana 2 (Col. 2) frecvențele relative procentuale ale valorilor din prima coloană - denumite pe scurt "procente".

Pasul 2. Construim coloana 3, care cuprinde frecvențele relative procentuale cumulate – pe scurt, "procentele cumulate". Modul de calcul al acestora este descris de săgețile din tabelă:

- primul element se transcrie din coloana de procente,
- oricare din următoarele elemente este suma dintre:
  - elementul din aceeaşi linie din coloana de procente şi
  - elementul precedent din propria coloană (de procente cumulate).

Exemplul 3.4.2.

S-a măsurat greutatea, în kilograme, pentru 103 băieți de 17 ani (date Dr. Cristiana Glavce). Calculându-se procentele **valorilor distincte** şi *procentele cumulate*, s-a obținut tabela următoare, în care numerele din coloanele 2 şi 3 sunt procente.

Col. 1	Col. 2 %	Col. 3 %	Col. 1	Col. 2 %	Col. 3 %	Col. 1	Col. 2 %	Col. 3 %
44	1,0	*1,0*	**57**	2,8	*32,8*	**66**	2,9	*78,6*
46	1,9	*2,9*	**58**	1,0	*33,8*	**67**	1,9	*80,5*
47	1,9	*4,8*	**59**	4,9	*38,7*	**68**	1,0	*81,5*
49	2,8	*7,6*	**60**	6,8	*45,5*	**69**	6,8	*88,3*
51	1,0	*8,6*	**61**	7,8	*53,3*	**70**	2,9	*91,2*
52	1,9	*10,5*	**62**	5,8	*59,1*	**71**	3,9	*95,1*
53	1,0	*11,5*	**63**	1,0	*60,1*	**72**	1,0	*96,1*
54	6,8	*18,3*	**63,5**	1,0	*61,1*	**75**	1,9	*98,0*
55	3,9	*22,2*	**64**	7,8	*68,9*	**77**	1,0	*99,0*
56	7,8	*30,0*	**65**	6,8	*75,7*	**80**	1,0	*100,0*

Pasul 3. Determinăm centila dorită. Pentru aceasta căutăm în coloana 3 - de procente cumulate - cel mai apropiat procent mai mare sau egal cu indicele centilei respective. Dacă procentul cumulat, astfel determinat, este mai mare strict decât indicele centilei, valoarea din coloana 1 de pe aceeaşi linie va fi centila căutată. În caz de egalitate, centila va fi semisuma dintre valoarea din coloana 1 de pe aceeaşi linie şi valoarea de pe linia următoare.

Exemplul 3.4.2'.

Pentru centila C_3 găsim procentul cumulat 4,8 care este pe linia valorii 47. Deoarece 4,9 > 3 rezultă $C_3 = 47$.

În mod analog, pentru centila C_{30} găsim procentul cumulat 30, care este pe linia valorii 56. Procentul cumulat fiind egal cu indicele centilei, rezultă $C_{30} = (56+57)/2 = 56,5$.

✓ Metoda poate fi utilizată şi pentru calculul decilelor, cuartilelor şi al medianei:

Exemplul 3.4.2''.

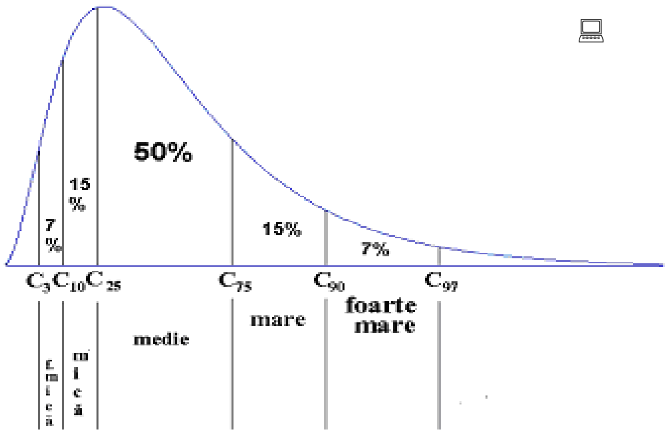
Decilele se calculează ținând cont că $D_1 = C_{10}$, $D_2 = C_{20}$, etc. Analog, cuartilele:

$Q_1 = C_{25} = 56$, deoarece 30,1 - procentul cumulat superior cel mai apropiat de 25 - se află pe linia lui 56. Analog, $Q_2 = Me = C_{50} = 61$, iar $Q_3 = C_{75} = 65$.

- ✓ In practică vom calcula centile doar pentru serii de volum mare ($n > 200$), căci o regulă de bun simţ ne cere să "împărţim" în o sută de părţi doar serii cu număr mult mai mare de unităţi. Exemplul 3.4.2. cu volum 103 are doar rol didactic.

2° Scări de clasificare bazate pe centile

Cu ajutorul unor centile se alcătuiesc scări de clasificare. De exemplu, în prac-tica antropologică se pot utiliza centilele C_3, C_{10}, C_{25}, C_{75}, C_{90} şi C_{97} pentru stabilirea categoriilor unor di-mensiuni (*foarte mi-că, mică, medie, mare şi foarte mare*) [14].



Deci o *scară de clasificare cu 5 trepte, bazată pe centile* este următoarea:

Interval de variaţie a dimensiunii *x*:	Diagnostic (clasă) dimensiune:
$C_3 \le x < C_{10}$	foarte mică
$C_{10} \le x < C_{25}$	mică
$C_{25} \le x < C_{75}$	medie
$C_{75} \le x < C_{90}$	mare
$C_{90} \le x < C_{97}$	foarte mare

Valorile mai mici decât C_3 sau mai mari decât C_{97} sunt excluse din serie.

Exemplul 3.4.2'''.

Calculând pentru distribuţia din exemplul 3.4.2. - după modelul anterior - centilele necesare acestei scări de clasificare, obţinem $C_3 = 47$, $C_{10} = 52$, $C_{25} = 56$, $C_{75} = 65$, $C_{90} = 70$ şi $C_{97} = 75$.

Intervalele şi denumirile vor fi:

$47 \le x < 52$	foarte mic ca greutate
$52 \le x < 56$	mic ca greutate
$56 \le x < 65$	mediu ca greutate
$65 \le x < 70$	are ca greutate
$70 \le x < 75$	foarte mare ca greutate

Valorile mai mici decât 47 kg şi cele mai mari sau egale cu 75 kg sunt excluse din clasificare.

- ✓ Recomandăm utilizarea scărilor bazate pe centile în cazul distribuţiilor asimetrice. Acestea au aceeaşi logică de construcţie ca şi mediana *Me* - care este centila C_{50} - şi care exprimă mai bine tendinţa centrală pentru distribuţiile unimodale asimetrice. În cazul distribuţiilor simetrice recomandăm scările sigmatice – vezi punctul 1° din 3.7.5.

3.4.3. Generalizare - cuantilele de ordinul *m*

- În cazul unei <u>curbe de frecvenţe</u> (distribuţie continuă a unei variabile continue), **cuantilele** sau **fractilele de ordinul *m*** = cele m - 1 valori care împart aria de sub <u>curba de frecvenţe</u> în m arii egale. Evident $m = 2, 3, \dots, t$.
- În cazul <u>seriilor statistice</u>, **cuantile** sau **fractile de ordinul *m*** = (m - 1) valori care separă seria statistică <u>ordonată crescător</u> în m subserii de volume egale, volumele fiind măsurate în număr de unităţi statistice şi eventual fracţiuni ale acestora. Evident $m = 2, 3, \dots, t$.
Pentru simplificarea enunţului următor vom nota *fractilele* prin $F^m{}_1$, $F^m{}_2$, ... , $F^m{}_l$, ... , $F^m{}_{m-1}$.

În practică, calculul celei de-a *l*-a cuantile de ordinul *m*, pentru $l = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ se face astfel:

- Ordonăm ascendent seria de volum *N*.
- Calculăm rangul cuantilei respective $rg(F^m_l) = N\cdot(l/m)$.
- Dacă $rg(F^m_l)$ este număr fracționar, îl rotunjim prin adaos şi cea de-a *l*-a cuantilă de ordinul *m* este termenul cu rangul rotunjit. În caz contrar, este semisuma dintre termenul cu rangul $rg(F^m_l)$ şi următorul termen.

Se observă că:

✓ *mediana* este *cuantila de ordinul* 2,
✓ *cuartilele* sunt *cuantilele de ordinul* 4,
✓ *decilele* sunt *cuantilele de ordinul* 10,
✓ *centilele* sunt *cuantilele de ordinul* 100.

Următoarele definiții generalizează noțiunile de *cuartilă superioară* şi *cuartilă inferioară.*

Cuantila superioară de ordinul *m* = cea mai mare cuantilă de ordinul *m.*
Cuantila inferioară de ordinul *m* = cea mai mică cuantilă de ordinul *m.*

✓ *Cuantila superioară de ordinul m* lasă la dreapta sa $1 / m$
- din aria distribuției (în cazul distribuțiilor continue), respectiv
- din termenii seriei şi eventual fracțiuni ale acestora (în cazul seriilor statistice).

✓ *Cuantila inferioară de ordinul m* lasă la stânga sa $1 / m$
- din aria distribuției (în cazul distribuțiilor continue), respectiv
- din termenii seriei şi eventual fracțiuni ale acestora (în cazul seriilor statistice).

Pentru distribuțiile continue (teoretice) este utilă generalizarea noțiunilor de *cuantilă superioară*, respectiv *inferioară, de ordinul m.* Este vorba de a lucra cu orice proporții α din arii (cu $0 < \alpha < 1$), nu numai cu valori particulare de forma $1 / m$.

3.4.4. α-cuantile unilaterale şi bilaterale

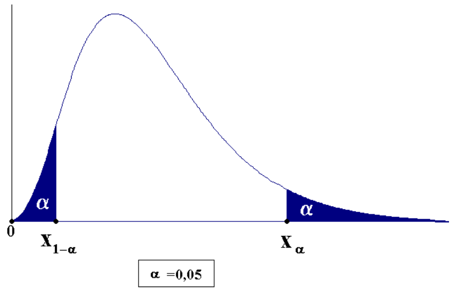
1° α-cuantile unilaterale

Fie o *curbă de frecvențe* (distribuție continuă a unei variabile continue),

α-cuantila unilaterală superioară = punctul care lasă la DREAPTA sa proporția α (respectiv procentul $\alpha\cdot 100$ %) din aria distribuției. Se notează $\boldsymbol{x_\alpha}$.

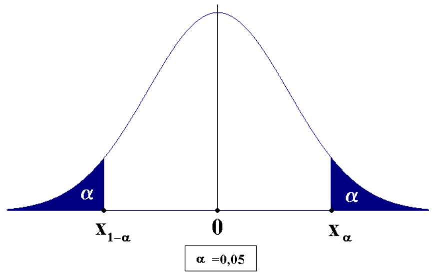
Pentru distribuțiile teoretice cu care se lucrează în teoria probabilităților şi în statistica inductivă, *α-cuantilele unilaterale superioare* importante în aplicații sunt tabelate. Tabelele conțin fie *α-cuantile* în funcție de α, fie invers. Modul de consultare a acestor tabele va fi prezentat şi exersat în paragraful dedicat distribuției normale (3.7.) şi în cadrul capitolelor de statistică inductivă.

Definiția *α-cuantilelor unilaterale inferioare* se obține înlocuind în definiția anterioară cuvântul DREAPTA cu STANGA. Se notează $\boldsymbol{x_{1-\alpha}}$ deoarece lasă la dreapta aria $1 - \alpha$.



- ✓ Se observă că $x_{1-\alpha} = -x_\alpha$ pentru orice α dacă şi numai dacă distribuția este simetrică față de axa $x = 0$ (simetrie denumită, pe scurt, ”față de zero”) ca în cazul distribuției normale standard şi al distribuțiilor Student (care vor fi prezentate în cadrul statisticii inductive.).

  În caz contrar (adică în cazul distribuțiilor asimetrice sau simetrice dar nu față de zero), egalitatea de mai sus nu mai este valabilă. Acesta este, de exemplu, cazul distribuțiilor χ^2 (care vor fi prezentate, de asemenea, în cadrul statisticii inductive).



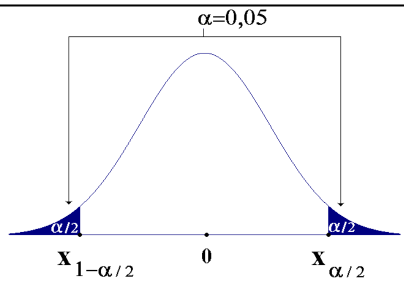
- ✓ În general, prin *α-cuantilă* (*inferioară* sau *superioară*) vom înțelege *α-cuantilă* *unilaterală* (*inferioară* sau *superioară*).

2° α-cuantile bilaterale

În cazul *α-cuantilelor unilaterale*, aria α a fost plasată într-o singură parte a distribuției. În cadrul paragrafului 10.2. dedicat testelor binare precum şi în cadrul statisticii inductive se va vedea utilitatea plasării unui α (dat) în ambele capete ale distribuției prin divizare în două arii egale (cu $\alpha / 2$). În acest caz, vom vorbi de *α-cuantile bilaterale*.

- **α-cuantila bilaterală superioară** = punctul care lasă la DREAPTA sa proporția $\alpha / 2$ (respectiv procentul $\alpha / 2 \cdot 100\ \%$) din aria distribuției. Se notează $x_{\alpha/2}$.
- **α-cuantila bilaterală inferioară** = punctul care lasă la STANGA sa proporția $\alpha / 2$ (respectiv procentul $\alpha / 2 \cdot 100\ \%$) din aria distribuției. Se notează $x_{1-\alpha/2}$.

0,05-*cuantilele bilaterale* pentru distribuția normală standard sunt figurate în desenul alăturat.



- ✓ *α-cuantila bilaterală superioară* este $\alpha / 2$-*cuantila unilaterală superioară*,
- ✓ *α-cuantila bilaterală inferioară* este $\alpha / 2$-*cuantila unilaterală inferioară*.
- ✓ Cele două *α-cuantile bilaterale* sunt egale şi de semne contrare ⇔ distribuția este simetrică față de origine (conform ultimei proprietăți de la *α-cuantile unilaterale* şi ținând cont de observațiile anterioare).